МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

МАТЕМАТИЧНИЙ ВСТУП ДО КУРСУ ФІЗИКИ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до самостійної роботи студентів

з курсу

"Загальна фізика"

(для студентів 1 курсу денної і заочної форм навчання за напрямами підготовки бакалаврів 6.050701 «Електротехніка та електротехнології», 6.050702 «Електромеханіка»)

ХАРКІВ – ХНУМГ ім. О. М. Бекетова – 2015

Математичний вступ до курсу фізики : методичні вказівки до самостійної роботи студентів з курсу **"Загальна фізика"** (для студентів 1 курсу денної і заочної форм навчання за напрямами підготовки бакалаврів 6.050701 «Електротехніка та електротехнології», 6.050702 «Електромеханіка») / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова; уклад.: Є. С. Орел. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2015. – 46 с.

Укладач: канд. фіз.-мат. наук Є. С. Орел

Рецензент: канд. фіз.-мат. наук, доц. А. С. Сисоєв

Рекомендовано кафедрою фізики
протокол № 2 від 27 вересня 2012 р.

ЗМІСТ

ВСТУП

У цих вказівках стисло, конспективно викладено відомості з векторної алгебри, математичного аналізу й векторного числення, які потрібні для курсу фізики вже на початку першого семестру, а також метод комплексних амплітуд.

Розглянуто далеко не всі питання математики, потрібні в курсі фізики, а тільки мінімальні відомості, що дозволяють почати виклад курсу фізики із застосуванням необхідного математичного апарату.

Питання елементарної математики (арифметика, алгебра, геометрія, тригонометрія) не викладаються, оскільки вважається, що вони загальновідомі.

1. ВЕКТОРИ

1.1. Поняття вектора

Вектори зображуються у просторі або на площині орієнтованим відрізком (стрілкою). На рис. 1.1 показаний вектор $\vec{A}$ та його координати-проекції на осі координат *x, y, z*: A_x, A_y, A_z.

Вектор повністю визначений завданням своїх проекцій, так що можна записати: $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$. Радіус-вектор $\vec{r}$ має координати *x, y, z*: $\vec{r} = (x, y, z)$. Модуль (довжина) вектора $\vec{A}$ позначається $|\vec{A}|$ або A (без стрілки) і дорівнює

$$\vec{A} = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \ . \qquad (1.1)$$

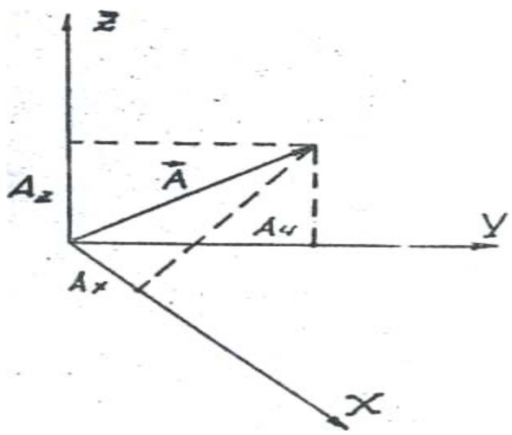


Рис. 1.1

Якщо одна із проекцій дорівнює нулю, то вектор лежить у площині. Наприклад, якщо A_x=0, то вектор лежить у площині *Y, Z*. Вектор $\vec{A}$=0, якщо A_x=A_y=A_z=0, тобто при $|\vec{A}|$ = 0.

Вектор не змінюється при паралельному перенесенні.

1.2. Додавання векторів

Сумою двох векторів $\vec{A}$ і $\vec{B}$ називається вектор $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ (рис. 1.2), в якого проекції на осі дорівнюють сумі відповідних проекцій доданків: $C_x=A_x+B_x$; $C_y=A_y+B_y$; $C_z=A_z+B_z$ (рис. 1.3). Геометрично знайти суму двох векторів можна двома способами: за допомогою правила паралелограма (рис. 1.2) або якщо сполучити початок одного (наприклад, $\vec{B}$) з кінцем іншого, і побудувати вектор $\vec{C}$, що з'єднує початок вектора $\vec{A}$ з кінцем вектора $\vec{B}$ (рис. 1.3). Другий спосіб зручніший, коли число доданків більше двох. На рис. 1.4 показана сума чотирьох векторів: $\vec{C} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \vec{A}_3 + \vec{A}_4$.

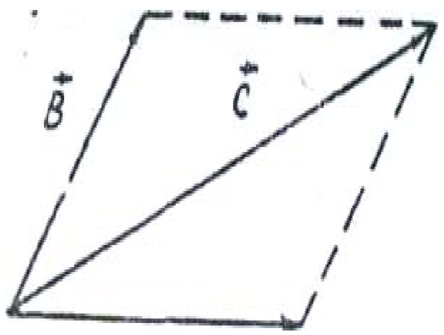


Рис. 1.2

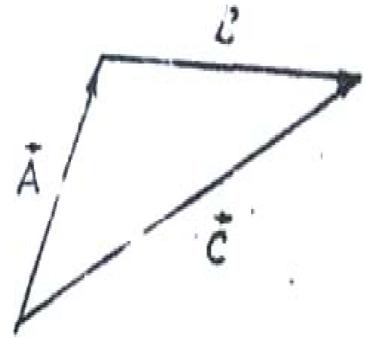


Рис. 1.3

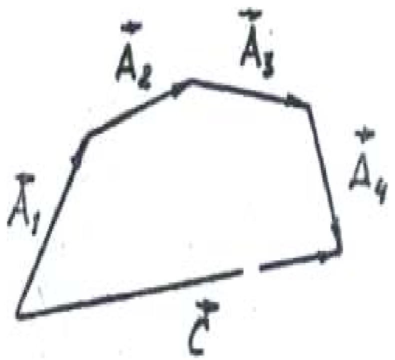


Рис. 1.4

1.3. Скалярний добуток векторів

Скалярний добуток двох векторів $\vec{A}$ і $\vec{B}$ позначається так: $\vec{A} \cdot \vec{B}$. Крапка між векторами іноді не ставиться. Скалярний добуток – це число (скаляр), яке дорівнює:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\alpha, \tag{1.4}$$

де α – кут між векторами $\vec{A}$ і $\vec{B}$.

За допомогою проекцій на осі скалярний добуток записується так:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y + A_z \cdot B_z. \tag{1.5}$$

Як видно з формули (1.4), скалярний добуток максимальний і дорівнює AB, коли кут α=0, тобто вектори $\vec{A}$ і $\vec{B}$ паралельні. Скалярний добуток дорівнює нулю, якщо вектори $\vec{A}$ і $\vec{B}$ ортогональні (кут $\alpha = 90°$), або один з векторів дорівнює нулю.

ФІЗИЧНИЙ СМИСЛ СКАЛЯРНОГО ДОБУТКА

Якщо вектор $\vec{A} = \overrightarrow{OA}$ (рис. 1.5) зображує переміщення матеріальної точки, а вектор $\vec{F} = \overrightarrow{OF}$ силу, що діє на цю точку, то скалярний добуток $\vec{A} \cdot \vec{F}$ чисельно дорівнює роботі сили $\vec{F}$.

Дійсно, роботу виконує тільки компонента сили $\overrightarrow{OF'}$. Виходить, робота з абсолютного значення дорівнює добутку довжин векторів $\vec{A}$ й $\overrightarrow{OF'}$.

При цьому вона вважається позитивною, якщо вектори $\overrightarrow{OF'}$ й $\vec{A}$ є рівноскерованими, і негативною в протилежному випадку. Отже, робота дорівнює модулю вектора $\vec{A}$, помноженому на алгебраїчну проекцію вектора $\vec{F}$ за напрямком вектора $\vec{A}$, тобто робота дорівнює скалярному добутку $\vec{A} \cdot \vec{F}$.

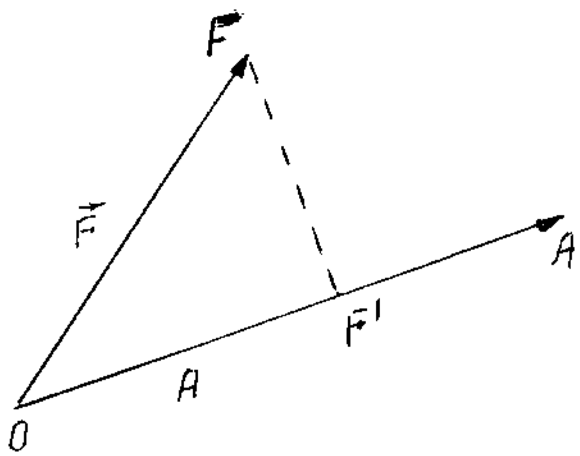


Рис. 1.5

1.4. Векторний добуток векторів

Векторний добуток двох векторів позначається так: $\vec{A} \times \vec{B}$. Іноді можна зустріти інше позначення: [$\vec{A}$, $\vec{B}$]. Векторний добуток двох векторів – вектор. Модуль (довжина) цього вектора визначається так:

$$|\vec{A}\times\vec{B}|=AB\sin\alpha, \tag{1.5}$$

де α – кут між векторами $\vec{A}$ та $\vec{B}$.

Напрямок цього вектора визначається правилом буравчика (правого гвинта). Якщо обертати буравчик у напрямку від першого співмножника до другого за найкоротшим кутом, то поступальний рух буравчика вкаже напрямок векторного добутку $\vec{A}\times\vec{B}$ (рис. 1.6). Векторний добуток векторів $\vec{A}$ і $\vec{B}$ ортогональний площині, в якій лежать вектори $\vec{A}$ і $\vec{B}$, отже, ортогональний як вектору $\vec{A}$, так і вектору $\vec{B}$.

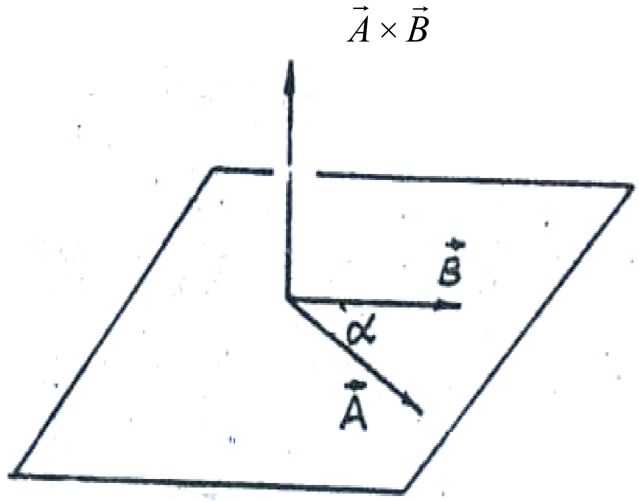


Рис. 1.6

Відзначимо, що векторний добуток, на відміну від скалярного, залежить від порядку співмножників: при зміні порядку співмножників воно змінює знак:

$$\vec{B}\times\vec{A} = -\vec{A}\times\vec{B}. \tag{1.6}$$

Модуль векторного добутку максимальний, коли вектори ортогональні (α = 90°).

Векторний добуток паралельних (антипаралельних) векторів дорівнює нулю (α = 0 або α = 180°).

ФІЗИЧНИЙ ЗМІСТ ВЕКТОРНОГО ДОБУТКУ

Із численних фізичних величин, що зображені векторним добутком, розглянемо тільки момент сили.

Нехай А є точка прикладання сили $\vec{F}$. Моментом сили $\vec{F}$ відносно точки О називається векторний добуток $\overrightarrow{OA} \times \vec{F}$. Оскільки модуль цього векторного добутку чисельно дорівнює площі паралелограма *AFLO* (рис. 1.7), то модуль моменту дорівнює добутку основи AF на висоту *ОК*, тобто силі, що помножена на відстань від точки О до прямої, уздовж якої діє сила.

У механіці доводиться, що для рівноваги твердого числа необхідно, щоб дорівнювали нулю не тільки сума векторів $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, ...$, які представляють сили, прикладені до тіла, але й сума моментів сил. У тому випадку, коли всі сили паралельні одній площині, додавання векторів, що представляють моменти, можна замінити додаванням і відніманням їхніх модулів. Але при довільних напрямках сил така заміна неможлива. Відповідно до цього векторний добуток визначається саме як вектор, а не як число.

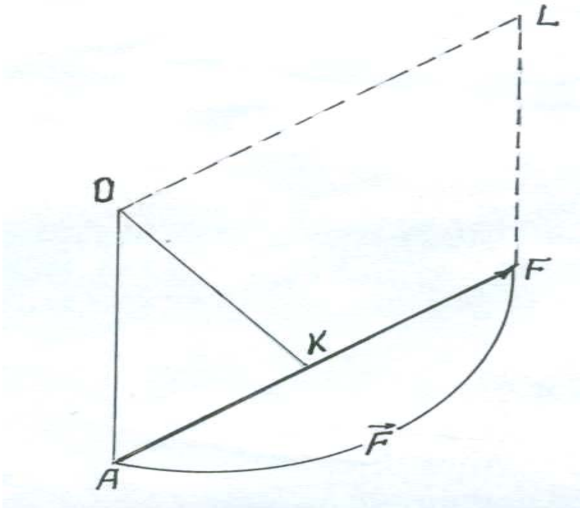


Рис. 1.7

1.5. Мішаний добуток трьох векторів

Мішаним добутком трьох векторів $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ називається скалярний добуток вектора $\vec{C}$ на векторний добуток векторів $\vec{A}$ і $\vec{B}$: $\vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})$ (рис. 1.6). Мішаний добуток за абсолютною величиною дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ (рис. 1.8). Коли вектори $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ ортогональні, мішаний добуток максимальний і дорівнює ABC.

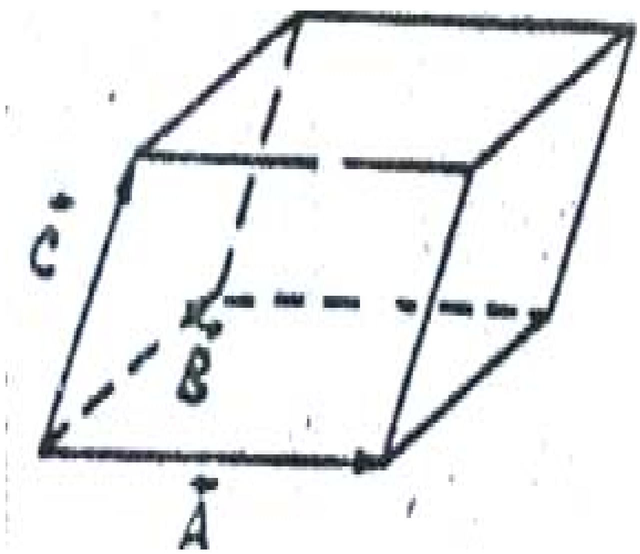


Рис. 1.8

Мішаний добуток дорівнює нулю, якщо два з векторів $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ паралельні, або всі вектори лежать в одній площині, або один з векторів дорівнює нулю.

2. ПОХІДНА Й ДИФЕРЕНЦІАЛ

2.1. Похідна й диференціал функції однієї змінної

Нехай *y* є функція однієї змінної *x : y=f(x)*. Похідна позначається так: $\frac{dy}{dx}$ або коротше y'. Похідну за часом *t* позначають часто так: $\dot{y}$ $(\dot{y}=\frac{dy}{dt})$.

Визначення похідної:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}. \qquad (2.1)$$

Тут Δx – прирощення аргументу, тобто різниця кінцевого x_1 і початкового x_0 значення аргументу $(\Delta x = x_1 - x_0)$, $\Delta y = y(x_1) - y(x_0)$ прирощення функції. Таким чином, похідна функції – це границя відносин прирощення функції до прирощення її аргументу, коли прирощення аргументу прагне до нуля. Надалі, якщо це не оговорено, будемо вважати, що границя у формулі (2.1), тобто похідна в розглянутій точці існує. При малих прирощеннях похідну можна приблизно обчислювати так:

$$y' \cong \frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (2.2)$$

Співвідношення (2.2) тим точніше, чим менше прирощення Δx, Δy. Зі співвідношень (2.1), (2.2) зрозумілий зміст похідної: вона визначає швидкість зміни функції.

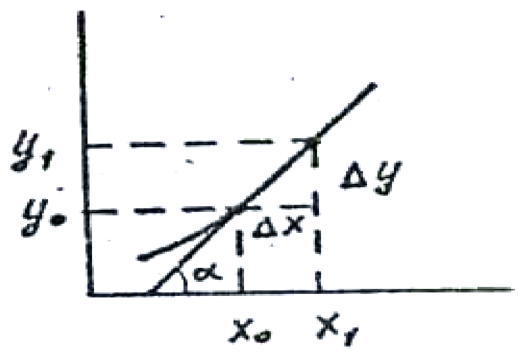


Рис. 2.1

Формулу (2.2) можна використати для приблизного визначення похідної за графіком функції (рис. 2.1). Якщо по осях відкладені безрозмірні величини, то, як видно з рис. 2.1,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\alpha \cong y'. \qquad (2.3)$$

Таким чином, похідна в даній точці дорівнює кутовому коефіцієнту $tg\alpha$ дотичної, проведеної до графіка функції в цій точці. При малих прирощеннях Δx й Δy дотична майже збігається з хордою, проведеною через початкову й кінцеву точку. Якщо по осях відкладаються розмірні величини, то для одержання похідної потрібно кутовий коефіцієнт помножити на відношення масштабів за осями *Y* та *X*. Наприклад, якщо по осі *X* відкладена напруга *U*, а по осі *Y* струм *J*, то $\frac{dJ}{dU} = \frac{m_J}{m_U} tg\alpha$,

де m_J – масштаб струму по осі *Y*, m_U – масштаб напруги по осі *X*.

З формули (2.2) випливає наближена рівність для збільшення функції:

$$\Delta y \cong y'\Delta x \,. \tag{2.4}$$

Права частина цієї рівності називається диференціалом *dy* функції *y=f(x)*:

$$dy = y'\Delta x \,. \tag{2.5}$$

Таким чином, диференціал функції однієї змінної – це частина прирощення функції, пропорційна прирощенню її аргументу.

Для незалежної змінної диференціал збігається з прирощенням: $dx=\Delta x$.

Співвідношення $\Delta y \cong dy = y'dx$ виконується тим точніше, чим менше прирощення $\Delta x=dx$. У фізиці часто малі величини називають елементарними. Елементарне прирощення функції практично збігається з її диференціалом: $\Delta y \cong dy$. Звичайно, елементарними, тобто досить малими можуть бути й величини, які не є прирощенням. Наприклад, елементарна робота в загальному випадку не є елементарним прирощенням, тобто диференціалом якої-небудь величини.

У табл. 2.1 наведені для довідок похідні деяких функцій, які найбільш часто використовуються в курсі фізики.

Таблиця 2.1

Функція	**Похідна**	**Функція**	**Похідна**
С (постійна)	0	*sin x*	*cos x*
X	*1*	*cos x*	*- sin x*
x^n	nx^{n-1}	*tg x*	$\frac{1}{\cos^2 x} = sc^2 x$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	*ctg x*	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	*arcsin x*	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	*arcos x*	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	*arctg x*	$\frac{1}{1+x^2}$
e^x	e^x	*arcctg x*	$-\frac{1}{1+x^2}$
a^x	$a^x lna$		
$ln\,x$	$\frac{1}{x}$		
$log_a x$	$\frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x\ln a}$		
$lg\,x$	$\frac{1}{x}\lg e \approx \frac{0{,}4343}{x}$		

2.2. Наближене обчислення функцій

Для наближеного обчислення функції можна скористатися формулою (2.4). Якщо врахувати, що $\Delta y=y(x_1)-y(x_0)$, то виходить

$$y(x_1) \cong y(x_0) + y'(x_0)\Delta x\,. \tag{2.6}$$

Формула (2.6) може бути уточнена:

$$y(x_1) \cong y(x_0) + y'(x_0)\Delta x + \frac{1}{2}y''(x_0)(\Delta x)^2 + ... \tag{2.7}$$

Подальші доданки у формулі (2.7) містять члени $(\Delta x)^3$, $(\Delta x)^4$ і т. ін. Якщо Δx мале, то члени с $(\Delta x)^2$, $(\Delta x)^3$ і т. ін. будуть ще в багато разів меншими. Наприклад, якщо Δx=0,1, то $(\Delta x)^2$=0,01, $(\Delta x)^3$=0,001 і т. ін. Тому коли Δx – мала величина, можна в першому наближенні скористатися найпростішою формулою (2.6). Результат буде тим точнішим, чим менший Δx.

Розглянемо $y=(1+x)^n$ – біном Ньютона. Тут x_0=1, x_1=1+x, $\Delta x=x$; $y(x_0)$=1; $y'(x_0)=n$. З формули (2.6) знаходимо:

$$(1+x)^n \cong 1+nx. \tag{2.8}$$

Формула (2.8) годиться для будь-яких, а не тільки для цілих значень n. Наприклад, при $n=\frac{1}{2}$ маємо $\sqrt{1+x} = 1+\frac{1}{2}x$; при n= -1 маємо $\frac{1}{1+x} \cong 1-x$.

Бувають випадки, коли застосування наближеної формули дозволяє отримати більш точний результат, ніж на калькуляторі з більшим числом розрядів. Наприклад, при обчисленні виразу $10^{12}[\sqrt{1+2\cdot10^{-12}}-1]$ на звичайному восьмиразрядному калькуляторі отримаємо нуль, а за допомогою наближеної формули (2.8) одержимо більш точну відповідь – одиницю (з точністю дванадцять знаків після коми).

2.3. Похідні й диференціал функції багатьох змінних

Функція багатьох змінних може змінюватися внаслідок зміни кожної змінної. Наприклад, функція трьох змінних $u=f(x, y, z)$ буде змінюватися при зміні кожної змінної x, y, z. Якщо x, y, z – координати точки в просторі, то функцію часто записують коротше: $u=f(\vec{r}\,)$, де $\vec{r}$ – радіус-вектор.

Якщо зафіксувати всі змінні, окрім однієї, то функція багатьох змінних перетвориться у функцію однієї змінної й до неї застосоване все наведене вище. Наприклад, якщо зафіксувати змінні y, z, тобто покласти $y=const$, $z=const$, то функція $u=f(x, y, z)$ перетвориться у функцію тільки змінної x.

Похідна функції, в якій зафіксовані всі змінні окрім однієї, називається часткою похідної. Наприклад, окрема похідна функції $u=f(x, y, z)$ по змінній x (позначається $\frac{\partial u}{\partial x}$) обчислюється за умови: $y=const$, $z=const$. Геометрично часткова похідна $\frac{\partial u}{\partial x}$ визначає швидкість зміни функції в напрямку осі X. Аналогічно, $\frac{\partial u}{\partial y}$ і $\frac{\partial u}{\partial z}$ визначають швидкість зміни функції уздовж осей $У$ та Z.

Відповідно до формул (2.4) і (2.5) величини $\frac{\partial u}{\partial x}dx$, $\frac{\partial u}{\partial y}dy$ і $\frac{\partial u}{\partial z}dz$ визначають елементарні збільшення (часткові диференціали) функції $u=f(x,y,z)$ внаслідок зміни кожної змінної (координати) x, y, z. У загальному випадку, коли змінюються всі змінні, повний диференціал (сумарне збільшення функції) дорівнюватиме сумі окремих диференціалів:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz\,. \tag{2.9}$$

2.4. Градієнт скалярної функції

Із зіставлення формул (2.9) і (1.5) видно, що повний диференціал *du* є скалярний добуток вектора $d\vec{r}=(dx, dy, dz)$ і вектора з координатами $\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$. Цей вектор називається градієнтом функції $u=f(x, y, z)$ і позначається *grad u*. Таким чином, координати градієнта в декартовій системі

$$grad\, u=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}\right), \qquad (2.10)$$

де $\vec{i}$, $\vec{j}$ та $\vec{k}$ – одиничні орти вздовж осей *x, y, z*.

Можливе й більш компактне позначення градієнта: $\vec{\nabla} u$. Символ $\vec{\nabla}$ читається „набла”. $\vec{\nabla}$ – векторний диференційний оператор Гамільтона:

$$\vec{\nabla}=\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}.$$

Таким чином, повний диференціал можна записати як скалярний добуток векторів градієнта $\vec{\nabla} u$ і диференціала радіуса-вектора $d\vec{r}$

$$du=\vec{\nabla} u\cdot d\vec{r}. \qquad (2.11)$$

Повний диференціал *du* буде максимальний, коли елементарне переміщення $d\vec{r}$ паралельно градієнту $\vec{\nabla} u$ (див. п. 1.3). У цьому випадку з формули (2.11) випливає: $du=\frac{|\vec{\nabla} u|}{|d\vec{r}|}$. Якщо позначити модуль елементарного переміщення в напрямку, паралельному градієнту, через dr_0, то зі співвідношення $du=\frac{|\vec{\nabla} u|}{|dr_0|}$ маємо:

$$|\vec{\nabla} u|=\frac{du}{dr_0}. \qquad (2.12)$$

ФІЗИЧНИЙ ЗМІСТ ГРАДІЄНТА ФУНКЦІЇ

Із формул (2.11) і (2.12) випливає фізичний смисл градієнта. Градієнт – це вектор, напрямок якого вказує напрямок найшвидшого зростання функції, а модуль дорівнює похідній функції в цьому напрямку. Відзначимо також, що під час руху в напрямку, перпендикулярному до градієнта функції, тобто при $d\vec{r} \perp \nabla u$, прирощення (диференціал) функції дорівнює нулю, тобто функція залишається сталою.

Геометричне місце точок, в яких функція набуває даного фіксованого значення, утворить у тривимірному випадку поверхню, а на площині – лінію однакового рівня: u=C.

Сукупності значень константи C відповідає сімейство поверхонь або ліній рівня. Наприклад, якщо функція u – потенціал, то отримаємо сімейство еквіпотенціальних (рівнопотенціальних) поверхонь; якщо функція u – висота над рівнем моря, то на топографічній карті вийде сімейство ліній однакової висоти.

Проведемо лінії градієнта так, щоб у кожній точці напрямок лінії збігався з напрямком градієнта (вектор градієнта повинен бути дотичним до лінії).

Зі сказаного вище зрозуміло, що сімейство ліній градієнта ортогонально сімейству еквіпотенціальних поверхонь. Зокрема, якщо функція u – потенціал, то лінії градієнта (точніше „мінус градієнта”) – лінії напруженості електричного поля, які можна вважати й силовими лініями. На рис. 2.2 для прикладу показана картина ліній напруженості (суцільні лінії) і еквіпотенціальних ліній (пунктирні лінії) точкового електричного заряду (рис. 2.2). Напрямок ліній напруженості не зазначений, він залежить від знаку електричного заряду.

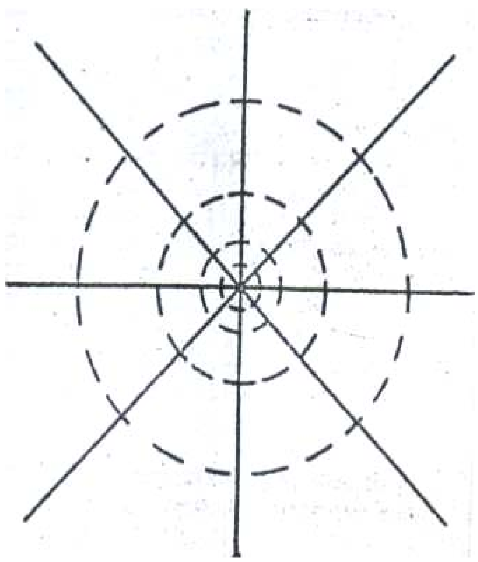


Рис. 2.2

Геометрична картина еквіпотенціальних поверхонь (ліній) і ліній градієнта не тільки дає наочне уявлення про функції $u=f(\vec{r}\,)$, але й дозволяє приблизно визначити градієнт функції. Модуль градієнта визначається з формули (2.12), в якій du замінено на Δu – різниця значень функції на двох сусідніх еквіпотенціальних поверхнях (або лініях), dr_0 на Δr_0 – відстань між сусідніми поверхнями (або лініями):

$$\left|\vec{\nabla} u\right| \cong \frac{\Delta u}{\Delta r_0}\,. \tag{2.13}$$

Напрямок градієнта в кожній точці очевидний з геометричної картини.

3. ІНТЕГРАЛ

3.1. Невизначений інтеграл

Функція *F(x)* називається первісною для функції *f(x)*, якщо її похідна дорівнює *f(x)*, тобто $F'(x)=f(x)$. Первісні однієї й тієї ж функції *f(x)* можуть відрізнятися на постійну величину, тому що похідна від константи дорівнює нулю. Тому в даній функції *f(x)* є безліч первісних відмінних одна від одної на постійну величину. Ця безліч усіх первісних називається невизначеним інтегралом:

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \tag{3.1}$$

де *f(x)* – яка-небудь первісна, а *C* – довільна постійна. З формули (3.1) зрозуміло, що обчислення невизначеного інтеграла є дія, зворотна диференціюванню, тобто для її виконання досить знайти яку-небудь функцію *F(x)*, щоб її похідна $F'(x)$ дорівнювала підінтегральній функції *f(x)*.

Зі співвідношення $\frac{dF}{dx} = f(x)$ випливає:

$$dF = f(x)dx\ . \tag{3.2}$$

У табл. 3.1 наведені невизначені інтеграли деяких функцій, які найчастіше використовуються в курсі фізики.

Таблиця 3.1

Ступеневі функції	***Тригонометричні функції***
$\int x^n dx = \frac{x^n+1}{n+1} (n \neq -1)$ $\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert$	$\int \sin x dx = -\cos x$ $\int \cos x dx = \sin x$
Показні функції	$\int tgx dx = -\ln\cos x$
$\int e^x dx = e^x$ $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$	$\int ctgx dx = \ln\sin x$ $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx$ $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx$

3.2. Визначений інтеграл

Певний інтеграл виражається через первісні функції формулою Ньютона-Лейбніца:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) . \tag{3.3}$$

Оскільки у правій частині формули (3.3) стоїть різниця первісних, то від вибору константи в первісній певний інтеграл не залежать: однакові константи в $F(a)$ і $F(b)$ знищуються при вирахуванні.

З'ясуємо геометричний зміст певного інтеграла (рис. 3.1). Величина dF, виражена формулою (3.2), дорівнює площі вузької смужки шириною dx і висотою $f(x)$. Ширина смужки dx настільки мала, що значення функції $f(x)$ у межах цієї площини можна вважати однаковими. Інтеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ є границею суми площ таких смужок, коли ширина кожної смужки dx прагне до нуля, а число смужок на площині від a до b прагне до нескінченності. У результаті виходить площа під кривою $f(x)$, обмежена віссю абсцис і лініями $x=a$, $x=b$. Ця площа на рис. 3.1 заштрихована подвійним штрихуванням.

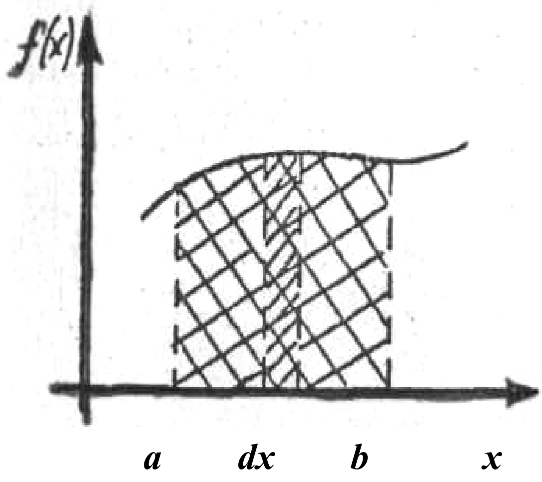


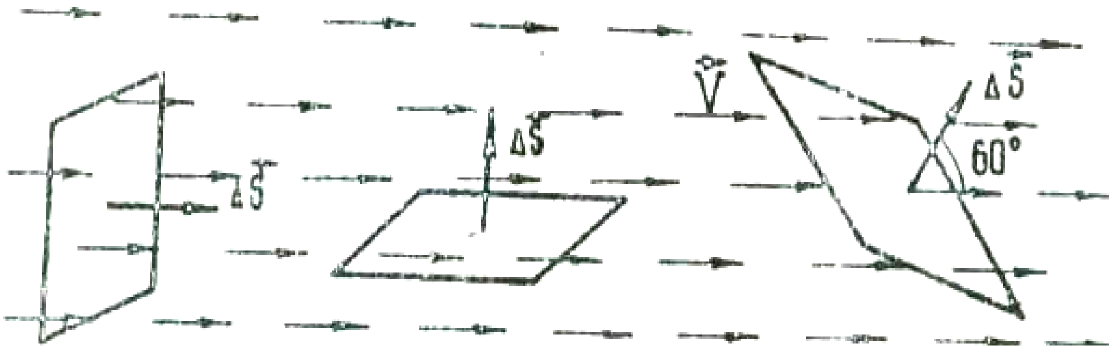
Рис. 3.1

Зміст інтеграла як границі суми елементарних величин зберігається і тоді, коли ці елементарні величини не є елементарними прирощеннями, тобто диференціалами. Звичайно, в цьому випадку формула (3.2) і формула Ньютона-Лейбніца (3.3), що випливає з неї, не мають місця. Елементарні величини, які не є диференціалами, прийнято позначати символом δ. Наприклад, елементарна робота δA не є в загальному випадку диференціал, тобто елементарне прирощення якоїсь іншої величини – первісної. Проте робота за даний час у даному процесі або на даній площині траєкторії може бути обчислена за допомогою інтеграла, тобто як сума елементарних робіт.

4. Основні відомості з математичної теорії векторних полів

4.1. Потік векторного поля

Зміст і походження назви цієї операції над векторним полем розглянемо на такому прикладі. Виберемо як векторну функцію швидкість руху $\vec{V}$ рідини, наприклад, води в річці. Рис. 4.1, на якому стрілками зображені величина й напрямок вектора $\vec{V}$ в різних точках рідини, дає наочне уявлення про векторне поле, яке розглядається.



Потік = VΔS **Потік = VΔS $\cos 90^0$=0** **Потік = VΔS $\cos 60^0=\frac{1}{2}$ VΔS**

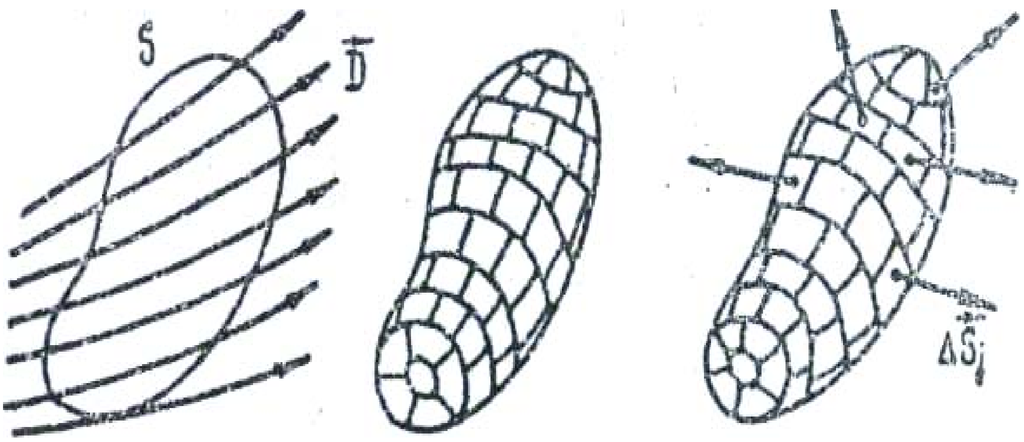
Рис. 4.1

Помістимо в рідину плоску рамку площею ΔS і підрахуємо кількість рідини, що проходить через рамку в одиницю часу (тобто фактично потік рідини через рамку). Для простоти вважатимемо, що вектор $\vec{V}$ від координат не залежить. Ясна річ, що при орієнтації площини рамки перпендикулярно $\vec{V}$ кількість рідини, що проходить через рамку в одиницю часу, дорівнює об'єму паралелепіпеда із площею основи ΔS і висотою V, тобто добутку $V\Delta S$. При довільній орієнтації рамки результат залежатиме від кута між вектором $\vec{V}$ і вектором нормалі до площини рамки, що задає її положення у просторі.

Це легко врахувати, ввівши вектор $\overrightarrow{\Delta S}$, що дорівнює за модулем площі рамки й спрямований по нормалі до неї. Тоді потік рідини, що проходить через рамку в одиницю часу, буде дорівнювати скалярному добутку $\vec{V}\cdot\overrightarrow{\Delta S}$. Зверніть увагу, що при такому визначенні потоку його знак несе інформацію про напрямок руху рідини. Якщо потік позитивний, то це означає, що рідина тече в напрямку, що утворить із вектором $\overrightarrow{\Delta S}$ кут, менший 90^0.

Поняття про потік можна узагальнити, розглядаючи тепер будь-яку векторну функцію й вибираючи в якості поверхні не плоску рамку, а довільну, в тому числі замкнуту поверхню.

Розглянемо будь-яке конкретне векторне поле (наприклад, поле вектора електричного зміщення $\vec{D}$) і замкнуту поверхню S довільної форми, що обмежує деякий об'єм V. На рис. 4.2, а зображена така поверхня й поле вектора $\vec{D}$ у вигляді декількох силових ліній, що пронизують її.



а) б) в)

Рис. 4.2

Розподілимо всю поверхню S на настільки малі ділянки, щоб кожен із них можна було вважати плоским, а вектор $\vec{D}$ у всіх його точках – однаковим (рис. 4.2, б). Кожна ділянка поверхні має певну величину площі ΔS. Крім того, його можна характеризувати напрямком зовнішньої нормалі. Тоді кожній ділянці, наприклад ділянці під номером j, можна поставити у відповідність вектор $\overrightarrow{\Delta S}_j$, що визначає величину площі ділянки й напрямок зовнішньої нормалі до неї (рис. 4.2, в).

Позначимо через $\vec{D}_j$ вектор електричного зміщення на j елементі поверхні. Скалярний добуток $\vec{D}_j \overrightarrow{\Delta S}_j$ називається потоком вектора $\vec{D}$ через елемент поверхні $\overrightarrow{\Delta S}_j$.

Походження назви зрозуміло з розглянутого раніше прикладу. Звернення за прикладом до плину рідини пов'язане з тим, що багато термінів теорії поля запозичені з гідродинаміки й проведення подібних аналогій дозволяє наочніше проілюструвати зміст понять, що вводяться. Необхідно ще раз підкреслити, що дане вище визначення потоку може бути застосовним до будь-якої векторної функції, яку б фізичну величину вона не представляла. У випадку математичного опису електромагнітного поля також уводиться поняття, схоже з потоком рідини, і теж називається потоком, хоча тут уже ніяка рідина не тече. Однак таке уявлення про потік має досить корисне значення.

Повернемося до рис. 4.2 і складемо потоки через всі елементи поверхні S. Отримаємо скалярну величину

$$\sum_j \vec{D}\, j \Delta \vec{S} j \;. \qquad (4.1)$$

Зменшуючи елементи ΔS_j і збільшуючи їхнє число, від суми (4.1) перейдемо до поверхневого інтеграла, що й визначає потік через всю поверхню S:

$$\varPhi = \lim_{\Delta Sj \to 0} \sum_j \vec{D} j \Delta \vec{S} j = \oint_S \vec{D}\, \overrightarrow{dS} \;. \qquad (4.2)$$

Таким чином, обчислення потоку будь-якої векторної функції $\vec{F}$ через поверхню S зводиться до наступного: розподілимо S на невеликі елементи; кожен елемент представимо вектором, модуль якого дорівнює площі елемента, а напрямок збігається із зовнішньою нормаллю; на кожному елементі візьмемо скалярний добуток вектора площі елемента й локального значення вектора $\vec{F}$ і підсумуємо ці добутки; границею цієї суми в міру зменшення площі елементів і буде потік – скалярна величина $\varPhi$, обумовлена співвідношенням

$$\varPhi = \oint_S \vec{F}\, \overrightarrow{dS} \;. \qquad (4.3)$$

Аналогічним чином визначається потік не тільки через замкнуту, але й через будь-яку обмежену поверхню S. У цьому випадку на значку поверхневого інтеграла не ставлять кружечок.

<u>Приклад 1</u>. Проілюструємо на простому прикладі можливості, які надає використання введеного поняття про потік. Розглянемо позитивний точковий заряд q й обчислимо потік вектора $\vec{D}$ збуджуваного ним поля через сферу радіуса r, у центрі якої розташований заряд q. Обчислення потоку $\varPhi$ у цьому випадку не завдасть труднощів, тому що величина вектора $\vec{D}$ в кожній точці

поверхні відповідно до закону Кулона дорівнює $q/4\pi r^2$, а його напрямок збігається із зовнішньою нормаллю в цій точці (рис. 4.3). Таким чином, маємо

$$\Phi = \oint_S \vec{D}\,\overrightarrow{dS} = D \times \text{площа сфери} = \frac{q}{4\pi r^2} 4\pi r^2 = q\,. \tag{4.4}$$

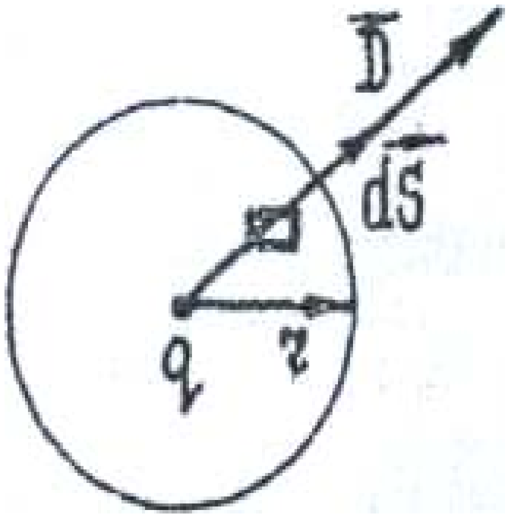


Рис. 4.3

Легко показати, що якби ми вибрали поверхню не сферичної, а довільної форми, то результат би не змінився. (Корисно переконатися в цьому самостійно). Якщо тепер усередині поверхні розміщений не один заряд, а їхня сукупність, або заряд розподілений рівномірно з об'ємною густиною ρ, то відповідно до принципу суперпозиції можемо записати

$$\oint \vec{D}\,\overrightarrow{dS} = \sum_i q_i = \int_V \rho\, dV \;. \tag{4.5}$$

Таким чином, включення поняття про потік дозволило узагальнити закон Кулона й подати в інтегральній формі зв'язок між електричним полем і його джерелами – зарядами.

ФІЗИЧНИЙ ЗМІСТ ПОТОКУ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Яка властивість векторного поля характеризує потік? Для відповіді на це запитання звернемося знову до прикладу з гідродинаміки (тобто як $\vec{F}$

будемо розглядати швидкість плину рідини $\vec{V}$). Тоді потік через замкнуту поверхню *S*, що обмежує об'єм *V*, має такий сенс: ця кількість рідини, що протікає через поверхню *S* за одиницю часу (слід пам'ятати про знак потоку, який визначається кутом між вектором $\vec{V}$ і напрямком нормалі до поверхні). Якщо всередині об'єму *V* немає джерел рідини й вона всередині його не зникає (немає стоків), то очевидно, що сумарний потік рідини через поверхню *S* дорівнює нулю. Кількість рідини, що входить в об'єм через частину поверхні S_1, буде дорівнювати кількості рідини, що виходить через частину поверхні S_2 (рис. 4.4, а).

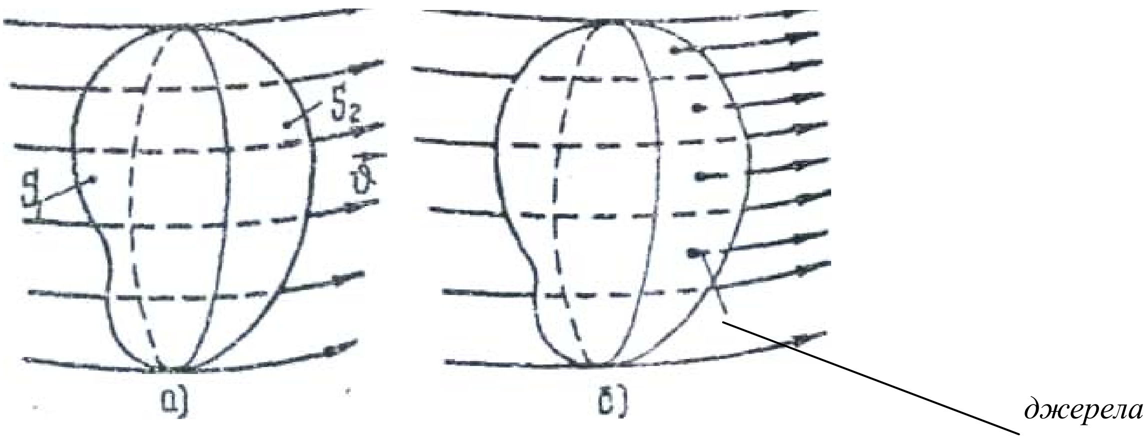


Рис. 4.4

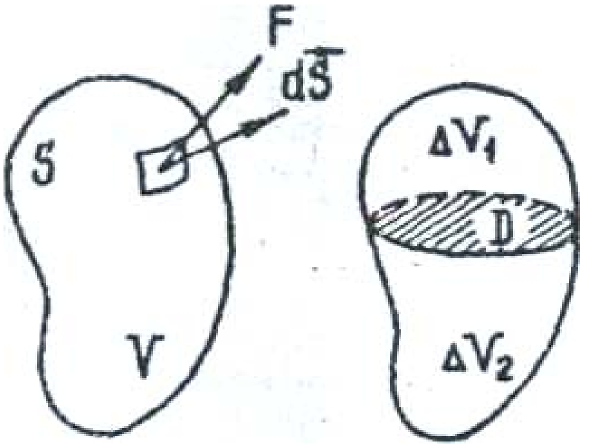
Якщо ж усередині об'єму є джерела рідини, то сумарний потік буде позитивним, тому що за одиницю часу буде більше рідини виходити з об'єму, ніж входити в нього (рис. 4.4, б). За наявності стоків усередині об'єму потік буде негативним. При цьому модуль потоку буде тим більшою, чим більшою буде інтенсивність джерел (стоків).

Таким чином, потік характеризує сумарний ефект дії (сумарну інтенсивність) усіх джерел і стоків векторного поля. Стосовно до електричного поля потік вектора $\vec{D}$ через поверхню *S,* що обмежує об'єм *V* (формула (4.5), характеризує сумарний ефект збудження поля всіма зарядами, зосередженими всередині цього об'єму. Потік – інтегральна характеристика векторного поля.

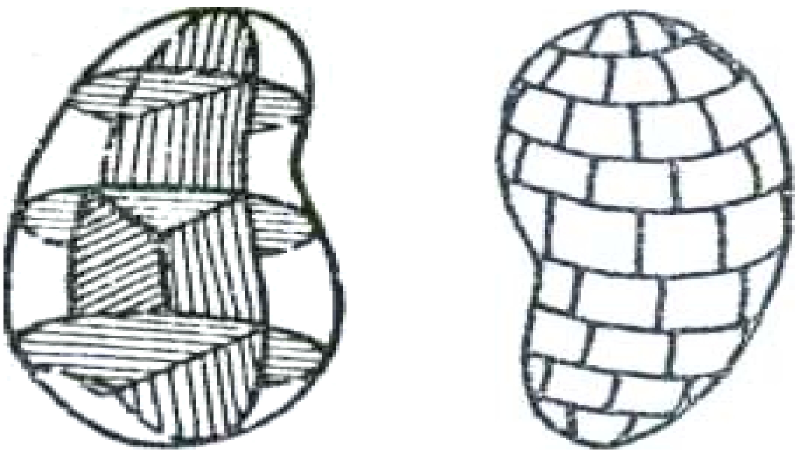
4.2 Дивергенція векторного поля

Під час вивчення полів, які збуджуються безперервно розподіленими в просторі джерелами, необхідно мати аналогічну потоку локальну характеристику, що описує інтенсивність джерел поля, розташованих в окремій певній точці простору. Такою характеристикою є *дивергенція* векторного поля.

Щоб дати змістовне визначення дивергенції, розглянемо кінцевий об'єм V, обмежений поверхнею S (рис. 1.14, а).



а) б)



в) г)

Рис. 4.5

Потік вектора $\vec{F}$ через поверхню S відповідно до даного вище визначення (4.3) – це поверхневий інтеграл від $\vec{F}$, узятий по всій поверхні,

$$\Phi = \oint_S \vec{F}\,\overrightarrow{dS} .$$

Розіб'ємо об'єм V на дві частини ΔV_1 і ΔV_2 поверхнею D (рис. 4.5, б). Поверхні, що обмежують об'єми ΔV_1 і ΔV_2, позначимо S_1 і S_2. Сума потоків через ці поверхні дорівнює потоку через всю поверхню S:

$$\Phi = \oint_S \vec{F}\,\overrightarrow{dS} = \oint_{S_1} \vec{F}\,\overrightarrow{dS}_1 + \oint_{S_2} \vec{F}\,\overrightarrow{dS}_2 . \quad (4.6)$$

(це тому так, що будь-яка ділянка поверхні D робить внесок з одним знаком у перший інтеграл у правій частині (4.6) і такий же внесок, але з протилежним знаком – у другий, тому що напрямок „назовні” в одному випадку буде напрямком „всередину” в іншому).

Продовжимо розподіл об'єму V внутрішніми перегородками на велику кількість частин $\Delta V_1, \ldots, \Delta V_j, \ldots, \Delta V_N$ з поверхнями $\Delta S_1, \ldots, \Delta S_j, \ldots, \Delta S_N$ (рис. 4.5, г). За будь-якої N буде справедливою рівність

$$\Phi = \oint_S \vec{F}\,\overrightarrow{dS} = \sum_{j=1}^{N} \oint_{S_j} \vec{F}\,\overrightarrow{dS}_j . \qquad (4.7)$$

При більших N ми хочемо підібрати величину, що характеризувала б векторне поле подібно введеному раніше потоку, але поблизу кожної точки об'єму V. Однак потік для цієї ролі вже не годиться, тому що величина поверхневого інтеграла $\oint_{S_j} \vec{F}\,\overrightarrow{dS}_j$ для кожної з малих об’ємів ΔV_j залежить від кількості цих об’ємів. Справді, якщо, наприклад, подвоїти їхнє число, то інтеграл $\oint_{S_j} \vec{F}\,\overrightarrow{dS}_j$ розділиться на два, кожен з яких буде меншим, ніж був до розподілу, тому що сума всіх потоків відповідно до (4.7) повинна залишитися постійною. Однак при розподілі об'єм також ділиться на частини, сума яких дорівнює первісному об'єму V . Тому має сенс розглянути відношення поверхневого інтеграла до об'єму для *j-го* об’єму:

$$\frac{1}{\Delta V_j} \oint_{S_j} \vec{F}_j\,\overrightarrow{dS}_j . \qquad (4.8)$$

Очевидно, що за досить великого N при кожному розподілі поверхневого інтеграла на дві частини буде ділитися на дві частини й об'єм. Необмежено продовжуючи такий розподіл і беручи границю написаного відношення при $\Delta V_j \to 0$, отримаємо величину, якою можна характеризувати векторне поле в околиці точки. Ця величина називається дивергенцією $\vec{F}$, позначається символом $div\,\vec{F}$:

$$div\,\vec{F} = \lim_{\Delta V_j \to 0} \frac{1}{\Delta V_j} \oint_{S_j} \vec{F}_j\,\overrightarrow{dS}_j , \qquad (4.9)$$

де ΔV_j – об'єм, що містить розглянуту точку;
S_j – поверхня, що його охоплює.

Таким чином, зміст поняття $div\,\vec{F}$ полягає в наступному: $div\,\vec{F}$ є потоком $\vec{F}$ з нескінченно малого об'єму ΔV_j, що припадає на одиницю об'єму.

Дивергенція $div\vec{F}$, як видно з визначення, є скалярною величиною й може змінюватися від точки до точки.

На підставі формули (4.9) легко переконатися, що в декартових координатах

$$div\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\,. \qquad (4.10)$$

Формально дивергенція – це певна диференціальна операція над компонентами векторної функції, що призводить до отримання скалярної функції координат.

Приклад 2. Наведемо приклад використання дивергенції під час опису електромагнітних полів. Але спочатку отримаємо корисне співвідношення, що зв'язує дивергенцію і потік векторного поля. Для цього перепишемо рівняння (4.7) у такому вигляді:

$$\oint \vec{F} d\vec{S} = \sum_{j=1}^{N} \oint_{S_j} \vec{F} d\vec{S}_j = \sum_{j=1}^{N} \Delta V_j \left[\frac{1}{\Delta V_j} \oint_{S_j} \vec{F} d\vec{S}_j \right]. \qquad (4.11)$$

Помноживши й розділивши праву частину на ΔVj, візьмемо границю від обох частин (4.11) за $\Delta V_j \to 0$:

$$\oint_S \vec{F}\, \overrightarrow{dS} = \lim_{\Delta V_j \to 0} \sum_{j=1}^{N} \Delta V_j \left[\frac{1}{\Delta V_j} \oint_{S_j} \vec{F}\, \overrightarrow{dS}_j \right]. \qquad (4.12)$$

У границі за $\Delta V_j \to 0$ величина в квадратних дужках переходить відповідно до (4.9) у дивергенцію, а сума – в об'ємний інтеграл:

$$\oint_S \vec{F}\, \overrightarrow{dS} = \int_V div\, \vec{F} dV \quad . \qquad (4.13)$$

Співвідношення (4.13) має назву теореми Остроградського-Гаусса. Вона справедлива для будь-якого векторного поля, для якого існує дивергенція. Смисл її очевидний: сумарний потік через поверхню *S*, що обмежує об'єм *V*, дорівнює сумарній інтенсивності джерел, безперервно розподілених в об’ємі.

Застосуємо тепер теорему Остроградського-Гаусса для електричного поля. Спочатку отримуємо співвідношення (4.5), що зв'язує вектор електричного зміщення $\vec{D}$ й заряди, розподілені рівномірно з об’ємною густиною $\boldsymbol{\rho}$:

$$\oint_S \vec{D}\,\overrightarrow{dS} = \int_V \rho\, dV \quad . \tag{4.14}$$

З іншого боку, відповідно до теореми Остроградського-Гаусса повинно виконуватися

$$\oint_S \vec{D}\,\overrightarrow{dS} = \int_V div\,\vec{D}\, dV \quad . \tag{4.15}$$

Порівнюючи праві частини (1.31) і (1.32), внаслідок довільності об'єму V отримуємо

$$div\vec{D} = \rho\,. \tag{4.16}$$

Поняття про дивергенцію дозволило в диференціальній формі встановити локальний зв'язок між густиною заряду й електричним полем. Рівняння (4.5) і (4.16)

$$\oint_S \vec{D}\,\overrightarrow{dS} = \int_V \rho\, dV \quad , \qquad div\vec{D} = \rho\,. \tag{4.17}$$

є двома різними видами запису третього закону Максвелла, що встановлює зв'язок між електричним полем і його джерелами – зарядами. Перше з них характеризує зв'язок між зарядами, зосередженими в більших об'ємах, і електричним полем, що збуджується ним. Друге зв'язує заряди, зосереджені в нескінченно малому об’ємі навколо кожної точки простору, зі значенням електричного поля поблизу цієї ж точки, безпосередньо відображаючи концепцію близькодії, що міститься в законах електродинаміки, з характерною для неї передачею взаємодії від однієї точки простору до сусідньої.

4.3. Циркуляція векторного поля

Циркуляцією будь-якого довільного вектора $\vec{F}$ в замкнутому контурі l називається криволінійний інтеграл виду

$$Ц = \oint_l \vec{F}\,\overrightarrow{dl} \quad . \tag{4.18}$$

Розглянемо деяке векторне поле (наприклад, вектора напруженості електричного поля $\vec{E}$) і довільний замкнутий контур l у просторі (рис. 4.6).

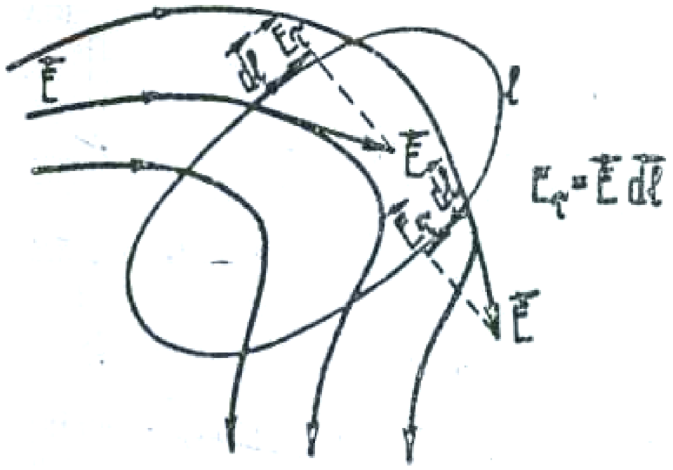


Рис. 4.6

Криволінійний інтеграл від дотичної складової напруженості поля E_τ, обчислений за контуром l, і є циркуляція $Ц$:

$$Ц = \oint_l E_\tau dl = \oint_l \vec{E}\,\overrightarrow{dl}\ . \tag{4.19}$$

Нагадаємо, що мається на увазі під криволінійним інтегралом. Розглянемо скалярну функцію $f(x,y,z)$ і криву l, що з'єднує дві точки M_1 і M_2 (рис. 4.7).

Відзначимо на кривій безліч точок і з'єднаємо їх хордами. Довжина *j-й* хорди дорівнює Δl_j, де j пробігає значення j =1, 2, 3….. Під криволінійним інтегралом $\int_l fdl$ мається на увазі межа суми добутків значення функції f_j, взятого в точці, що лежить на *j-й* хорді, на довжину хорди при необмеженому збільшенні числа хорд ($\Delta V_j \to 0$):

$$\int_l fdl = \lim_{\Delta l_j \to 0} \sum_j f_j \Delta l_j\ . \tag{4.20}$$

У формулі (4.19) інтеграл означає те саме, за винятком наступного: крива l замкнута (утворює контур), що відбито кружечком на знаку інтеграла;

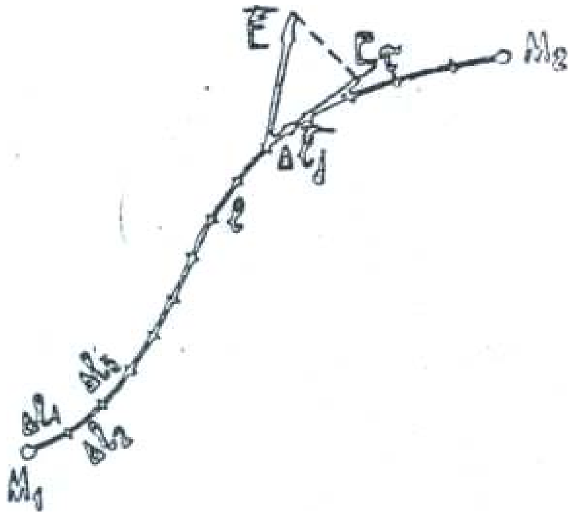


Рис. 4.7

замість скалярної функції f під знаком інтеграла стоїть інший скаляр E_τ – проекція вектора $\vec{E}$ на напрямок $\Delta\vec{l}$. Зрозуміло, що $E_\tau \Delta l = \vec{E}\ \Delta\vec{l}$.

Інтеграл в (4.19) і означає границю суми таких доданків. У підінтегральному виразі $\overrightarrow{dl}$ є нескінченно малим вектором, дотичним у будь-якій точці до кривої l. Є два напрямки, за якими можна обійти контур l, вибирається одне з них. У загальному випадку крива l може бути не пласкою, як на рисунку, а довільно кривою у просторі.

Таким чином, обчислення циркуляції будь-якого вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру l обумовлює наступне: потрібно вибрати напрямок обходу й розбити контур на невеликі практично прямолінійні елементи; кожен елемент представити вектором $\overrightarrow{dl}$, напрямок якого збігається з напрямком обходу, а модуль дорівнює довжині елемента; на кожному елементі взяти скалярний добуток вектора елемента й локального значення вектора $\vec{F}$ й підсумувати ці добутки; границею цієї суми по мірі зменшення довжини елемента й буде циркуляція

$$Ц = \oint_l \vec{F}\,\overrightarrow{dl} = \lim_{\Delta l_j \to 0} \sum_j \vec{F}_j\, \overrightarrow{\Delta l}_j \ . \qquad (4.21)$$

Походження назви „циркуляція” стає зрозумілим, якщо знову звернутися до плину рідини. Уявимо знову поле швидкостей, що описує потік рідини (рис. 4.8, а).

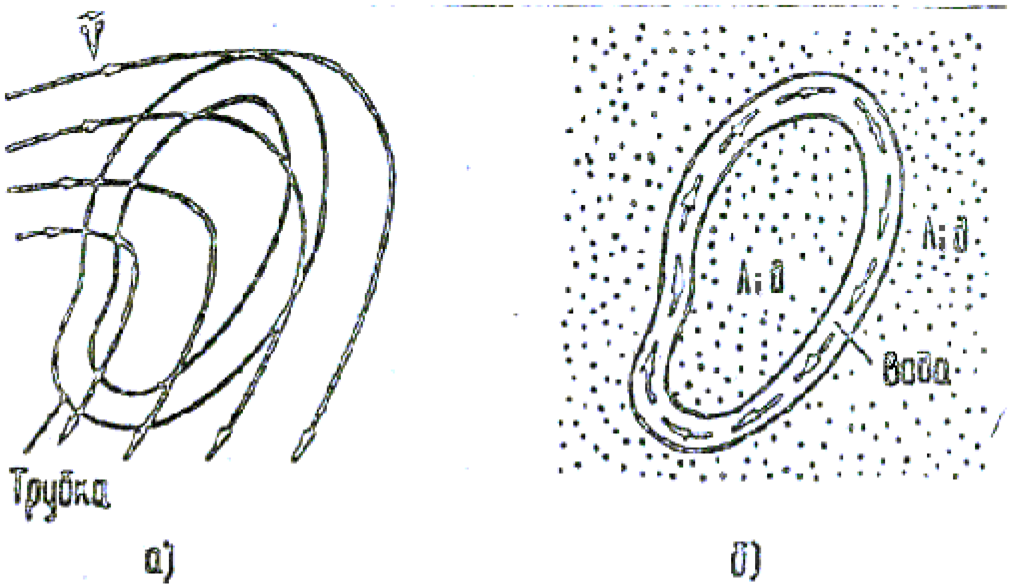


Рис. 4.8

Чи циркулює рідина всередині такого потоку, тобто чи існує її обертальний рух уздовж певного замкнутого контуру? Уявимо собі, що ми раптом заморозили рідину всюди, за винятком внутрішньої частини, замкнутої у вигляді петлі, трубки постійного перерізу (рис. 4.8, б). Тоді якщо вихідне поле швидкостей забезпечить рідині імпульс в одному напрямку, вона зможе продовжувати рухатися всередині трубки. Для кількісної характеристики циркуляції можна ввести інтеграл від швидкості по замкнутому контуру трубки:

$$Ц = \oint_l \vec{V}\,\overrightarrow{dl}\ . \tag{4.22}$$

Як і у випадку з потоком, ми розширюємо наші уявлення за межі гідродинаміки й визначаємо циркуляцію співвідношенням (4.18) для будь-якого векторного поля (навіть якщо там немає нічого такого, що рухається, наприклад, для векторів електромагнітного поля). В останньому випадку циркуляція описує вихровий характер поля.

<u>Приклад 3.</u> Використовуючи введене поняття про циркуляцію, можна в інтегральній формі записати закон Ампера, що встановлює зв'язок між постійним струмом і збуджуваним ним магнітним полем. Відомо, що силові лінії напруженості магнітного поля $\vec{H}$, збуджуваного струмом I, який проходить по провіднику, – кола, що охоплюють провідник, як показано на

рис. 4.9. Напрямок $\vec{H}$ пов'язаний з напрямком струму, що є його джерелом, правилом правого гвинта. Величина $\vec{H}$ в точці, що стоїть на відстані r від провідника, визначається співвідношенням

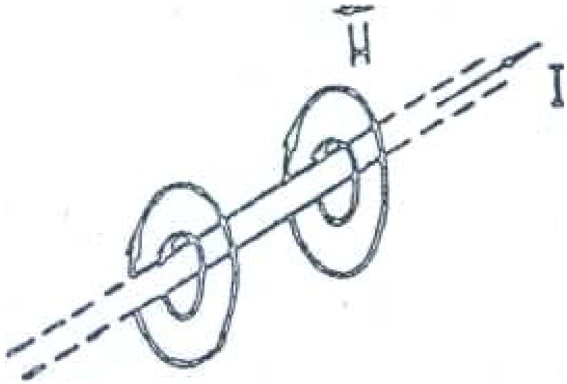


Рис. 4.9

$$H = \frac{I}{2\pi r}. \tag{4.23}$$

Розглянемо циркуляцію вектору $\vec{H}$ по контуру, що лежить у площині перпендикулярній до проводу, – $\oint\limits_{l} \vec{H}\,\overrightarrow{dl}$.

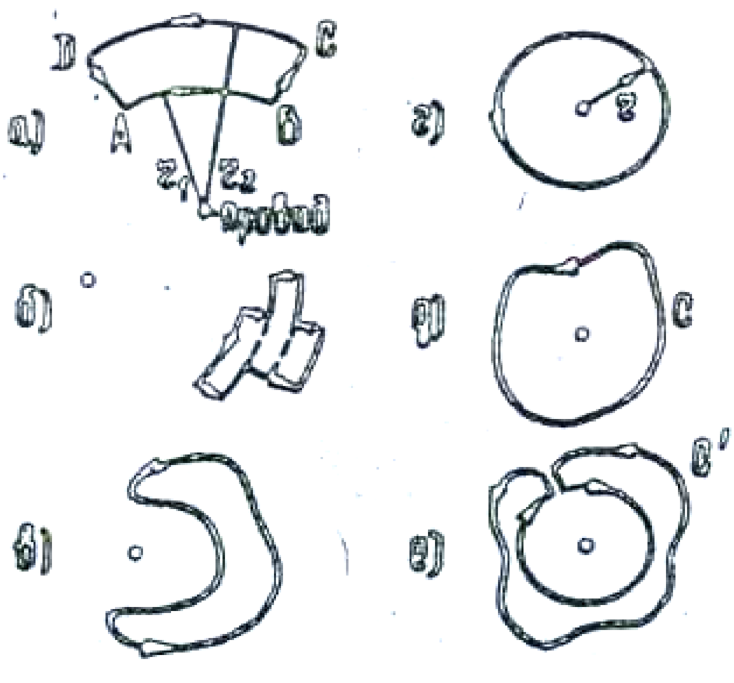


Рис. 4.10.

Розглянемо спочатку контур АВСД (рис. 4.10), складений з радіальних відрізків і дуг. Циркуляція цим шляхом дорівнює нулю з наступної причини. Шляхи ВС і ДА перпендикулярні до вектора $\vec{H}$, інтегрування по них у циркуляцію внеску не робить. Інтегрування по дугах АВ і СД дає однаковий і протилежний за знаком внесок, тому що уздовж АВ поле сильніше в r_2/r_1 разів, ніж уздовж СД, але довжина АВ у стільки ж разів менша за довжину СД, оскільки ці дуги стягують той же кут відносно проводу. Звідси легко зробити висновок, що циркуляція будь-яким шляхом, що не охоплює проводу (рис. 4.10, б, в), також дорівнює нулю, тому що такий шлях можна подати у вигляді сукупності шляхів типу а).

Розглянемо тепер коловий шлях, що охоплює провід (рис. 4.10, г). Довжина кола дорівнює $2\pi r$, значення поля в будь-якій точці її дорівнює $\dfrac{I}{2\pi r}$. Отже значення циркуляції цим шляхом дорівнює просто I. Користуючись рис. 4.10, д, е, неважко зрозуміти, що обчислення циркуляції по контуру довільної форми, але такої, що охоплює провідник, дало б такий же результат. Наприклад, розглянемо контур С (рис. 4.10, д). Побудуємо (рис. 4.10, е) контур C', що складається зі шляху, подібного С, і розглянутого вище колового шляху, але не охоплює проводу. Циркуляція по C' повинна дорівнювати нулю. Тоді циркуляція по С повинна з точністю до знака збігатися з циркуляцією по коловому шляху. Напрямки обходу кругових контурів на рис. 4.10, е, г протилежні, тому отримаємо той же результат. Наш загальний висновок полягає в тому, що циркуляція вектора $\vec{H}$ по довільному замкнутому контуру, який охоплює провідник зі струмом, дорівнює силі струму, що тече по цьому провіднику:

$$\oint_l \vec{H}\,\overrightarrow{dl} = I \quad (4.24)$$

З огляду на те, що сила струму I пов'язана з вектором щільності струму $\vec{j}$ співвідношенням $I = \int_{S_{пр}} \vec{j}\,\overrightarrow{dS}$, де $S_{пр}$ – площа поперечного перерізу провідника, закон Ампера можна записати в більш загальному вигляді:

$$\oint_l \vec{H}\,\overrightarrow{dl} = \int_S \vec{j}\,\overrightarrow{dS} \quad (4.25)$$

де S – поверхня, що опирається на контур l. Напрямок нормалі до S визначається правилом правого гвинта за напрямком обходу контура l.

Співвідношення (4.25) – інтегральна форма запису закону Ампера. У ній утримується інформація про вихровий характер силових ліній магнітного поля. Легко переконатися, що якщо силові лінії поля мають вигляд, зображений на рис. 4.11, а, б, то циркуляція, обчислена за будь-яким замкнутим контуром в такому полі, дорівнюватиме нулю. Такі поля називаються безвихровими, або потенціальними. Приклад потенціального поля – електричне поле точечного заряду (рис. 4.11, б).

а)
б)

Рис. 4.11

4.4. Ротор векторної функції

Циркуляція – інтегральна характеристика векторного поля.

Наша подальша мета – ввести поняття, що описує локальні властивості поля – ступінь його завихреності поблизу точки, зробивши перехід, до деякої міри аналогічний переходу від поняття про потік до поняття про дивергенцію.

Виберемо малий плаский контур площею ΔS з нормаллю $\vec{n}^{\,0}$, напрямок якої пов'язано правилом правого гвинта з напрямком обходу по контуру, і помістимо його в поле $\vec{F}$ так, щоб досліджувана точка M лежала в площині контуру (рис. 4.12).

Потім будемо повертати контур у різних напрямках. Якщо поблизу точки M є завихрення, то при одному з положень нормалі $\vec{n}^{\,0}$ циркуляція досягне найбільшого значення. Тому для характеристики завихреності поля поблизу точки вводять вектор $rot\,\vec{F}$ (ротор). Його напрямок у будь-якій точці перпендикулярний до тієї площини, що проходить через обрану точку, для якої величина циркуляції максимальна, тобто збігається з напрямком нормалі до площадки ΔS, для якого циркуляція $Ц=Ц_{max}$. Модуль ротора дорівнює граничному значенню циркуляції, що припадає в цій площині на одиницю площі контуру, що оточує обрану точку:

$$\left|rot\,\vec{F}\right| = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\left(\oint_l \vec{F}\,\vec{dl}\right)\max}{\Delta S}. \tag{4.26}$$

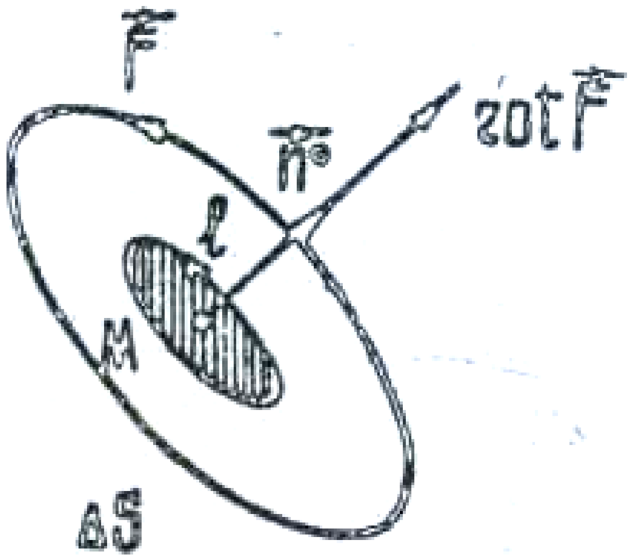


Рис. 4.12

Назва „ротор” нагадує нам про те, що векторне поле, ротор якого відрізняється від нуля, має циркуляцію або завихреність. Ротор кількісно характеризує ступінь завихреності поля поблизу точки. Виявити завихрення в потоці рідини можна, наприклад, за допомогою малої турбінки, вміщуючи її в досліджувану точку (рис. 4.13).

Рис. 4.13

Якщо в якомусь положенні осі турбінки потік рідини буде турбінку обертати, то в даній точці є завихрення. В одному з положень осі турбінки швидкість її обертання буде максимальною. Напрямок уздовж цього положення осі, пов'язаний правилом правого гвинта з напрямком обертання, і є напрямком ротора $\vec{V}$ в досліджуваній точці.

Аналогічний „ротор-метр" можна побудувати, принаймні в уяві, і для електричного поля. Для цього треба тільки прикріпити позитивно заряджені кульки до ступиці колеса ізолюючими спицями (рис. 4.14).

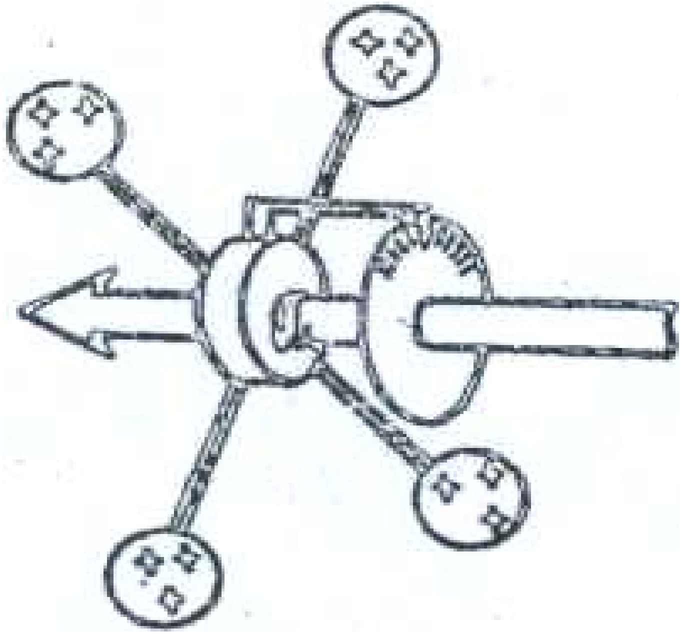


Рис. 4.14

Досліджуючи за допомогою такого „ротор-метра" електричне поле, ми виявили б, що в точках, де $rot\,\vec{E} \neq 0$, колесо намагалося б повернутися навколо своєї осі. За допомогою пружини, що перешкоджає обертанню, можна за кутом закручування визначити обертальний момент, що буде пропорційний проекції $rot\,\vec{E}$ на напрямок осі „ротор-метра". Якщо ми, змінюючи орієнтацію осі, визначимо напрямок, для якого обертальний момент буде максимальним і спрямованим за годинниковою стрілкою, то це і є напрямок $rot\,\vec{E}$.

Таким чином, ротор – локальна характеристика ступеня завихреності поля. Проекція ротора на будь-який напрямок $\vec{n}^0$ – це границя відношення циркуляції по контуру, нормаль якого відхилена від напрямку ротора, до площі контуру:

$$\left(rot\ \vec{F}\right)\vec{n}^{\,0} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint\limits_{l} \vec{F}\,\overrightarrow{dl}}{\Delta S}\ .$$

Можна отримати рівняння, що пов'язує циркуляцію й ротор, аналогічне рівнянню (4.13), що зв'язує потік і дивергенцію. Для цього контур l, за яким обчислюється циркуляція $Ц$, розіб'ємо на N контурів. Циркуляція по вихідному контуру дорівнює сумі циркуляції (рис. 4.15):

$$Ц = \int\limits_{l} \vec{F}\overrightarrow{dl} = \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{l_j} \vec{F}\overrightarrow{dl}_j\ . \tag{4.27}$$

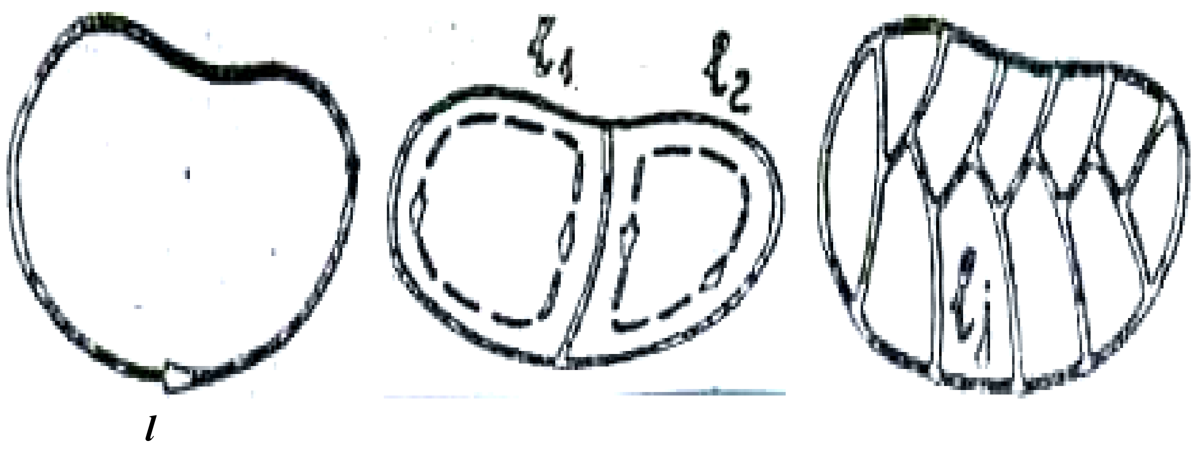


Рис. 4.15

Перепишемо (4.27) у вигляді

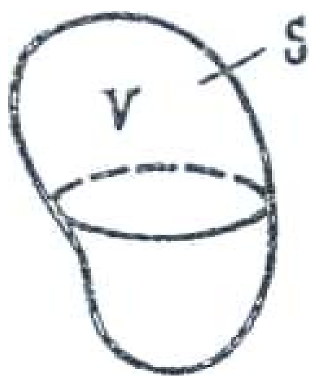
$$\int\limits_{l} \vec{F}\overrightarrow{dl} = \sum_{j=1}^{N} \Delta S_j \left[\frac{\int\limits_{l_j} \vec{F}\overrightarrow{dl}_j}{\Delta S_j} \right], \tag{4.28}$$

розділивши й помноживши праву частину на площу ΔS_j, що стягується контуром l_j. У границі при $\Delta S_j \to 0$ (тобто при $N \to \infty$) величина в дужках в (4.28) перейде в $rot\ \vec{F} \cdot \vec{n}_j$, де $\vec{n}_j$ – одиничний вектор, перпендикулярний до *j-ї* ділянки. Праворуч ми тоді отримаємо суму добутків площі *j-ї* ділянки на нормальний компонент $rot\ \vec{F}$ по всіх ділянках, які становлять поверхню *S*, що стягується *l*. А це не що інше, як поверхневий інтеграл по поверхні *S* від $rot\ \vec{F}$, тобто потік ротора через поверхню *S*. У підсумку отримуємо співвідношення, що називається теоремою Стокса:

$$\oint_l \vec{F}\,\overrightarrow{dl} = \int_S rot\ \vec{F}\,\overrightarrow{dS}\ . \tag{4.29}$$

У (4.29) *S* – поверхня, яка спирається на контур *l*. За структурою формула (4.29) нагадує теорему Остроградського-Гаусса (4.13). Теорема Стокса пов'язує циркуляцію з поверхневим інтегралом від ротора вектора, а теорема Остроградського-Гаусса пов'язує потік з об'ємним інтегралом від дивергенції вектора. Теорема Стокса має справу з поверхнею й кривою, на яку поверхня спирається, а теорема Остроградського-Гаусса відноситься до об'єму і поверхні, що його охоплює (рис. 4.16).

а) Теорема Остроградського-Гаусса



б) Теорема Стокса

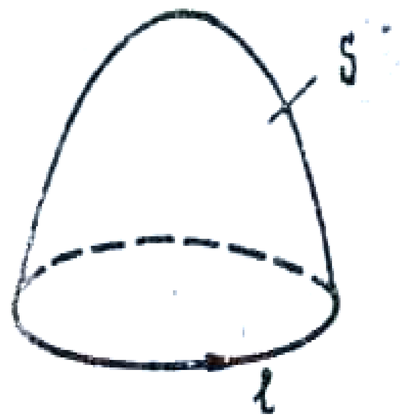


Рис. 4.16

Поверхня *S* охоплює об'єм *V*

Поверхня *S* спирається на криву *l*

$$\oint_S \vec{F}\,\overrightarrow{dS} = \int_V div\,\vec{F}\,dV \qquad\qquad \oint_l \vec{F}\,\overrightarrow{dl} = \int_S rot\,\vec{F}\,\overrightarrow{dS}$$

У декартовій прямокутній системі координат дивергенція й ротор обчислюються за наступними правилами

$$div\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}; \tag{4.30}$$

$$rot\vec{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\vec{k}\,. \tag{4.31}$$

Якщо ввести векторний диференціальний оператор Гамільтона, що позначений символом ((набла),

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\,,$$

то легко бачити, що співвідношення (1.41) і (1.42) можна записати у вигляді

$$div\ \vec{F} = \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\,,$$

$$rot\ \vec{F} = \vec{\nabla}\times\vec{F}\,.$$

5. ХВИЛЬОВІ РІВНЯННЯ ТА ЇХНІ РІШЕННЯ

Рівняння виду

$$\nabla^2 \vec{F} - \frac{1}{V^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial t^2} = 0 \qquad (5.1)$$

називається однорідним векторним рівнянням Даламбера. Векторне рівняння Даламбера еквівалентне трьом скалярним рівнянням, кожне з яких має вигляд

$$\nabla^2 U - \frac{1}{V^2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0\,, \qquad (5.2)$$

де U - компоненти вектора, що задовольняє векторному рівнянню.

Розглянемо для простоти випадок, коли функція залежить тільки від однієї декартової координати, скажімо *Z*. Тоді рівняння (5.2) має вигляд

$$\frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0\,. \qquad (5.3)$$

Це – одномірне хвильове рівняння. Загальне рішення цього рівняння – це сума двох довільних функцій, однієї – від аргументу (*Z*-*Vt*), а іншої – від (*Z*+*Vt*):

$$U(z,t) = F_1(z - Vt) + F_2(z + Vt)\,. \qquad (5.4)$$

Фізичний процес, що описує кожну з функцій F_1 або F_2, називають хвильовим, або хвилею. Наприклад, функція $F_1(Z\text{-}Vt)$ є функцією однієї змінної (*Z*-*Vt*) і описує „хвилю”, що рухається зі швидкістю *V* уздовж осі *z* в напрямку зростання позитивних значень координати (рис. 5.1).

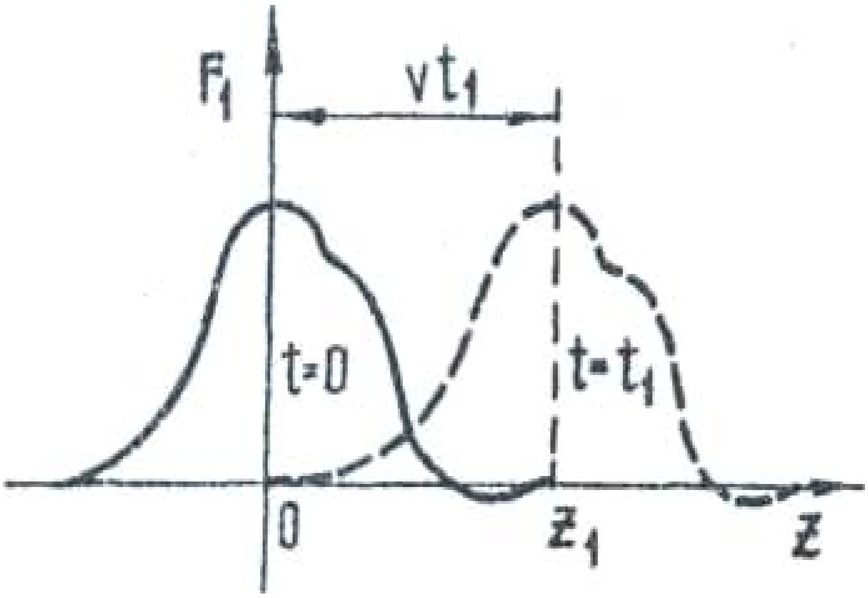


Рис. 5.1

Так, якщо максимум функції F_1 припадає на нульове значення аргументу (Z-Vt), то при t=0 максимум F_1 перебуває в точці з координатою z=0. Пізніше $t = t_1$ максимум виявиться в точці z_1, пройшовши шлях, що дорівнює Vt_1. Таким чином, параметр V у рівняннях (5.1), (5.3) має простий сенс – це швидкість поширення хвилі. Ясно також, що функція $F_2(Z+Vt)$ описує „зворотню” хвилю, що біжить уздовж осі z назустріч „прямій” хвилі $F_1(Z\text{-}Vt)$.

Таким чином, одновимірне хвильове рівняння має численну кількість нетривіальних рішень. Всі ці рішення мають вигляд хвиль, що поширюються в різних напрямках зі швидкістю $V = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$, яка збігається зі швидкістю світла у вакуумі.

Такий висновок має фундаментальне значення, оскільки означає, що змінне електромагнітне поле може існувати у вакуумі без зарядів і струмів, і його варто розглядати як самостійну фізичну реальність, а не як атрибут зарядів. Іноді рішення (5.4) записують у вигляді

$$U(z,t) = F_1'(t - \frac{Z}{V}) + F_2'(t + \frac{Z}{V})\ . \tag{5.5}$$

Це – еквівалентна форма запису, оскільки очевидно, що

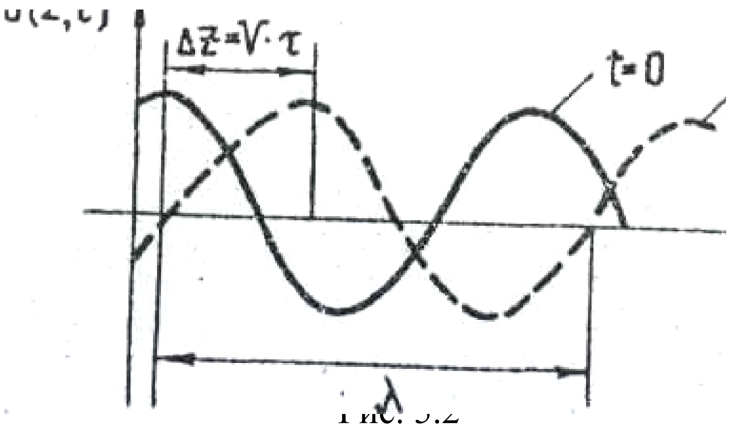
$$F_1(t-\frac{Z}{V})=F_1(-\frac{Z-Vt}{C})=F_1'(Z-Vt)\,,$$

$$F_2(t+\frac{Z}{V})=F_2(\frac{Z+Vt}{V})=F_2'(Z+Vt)\,. \qquad (5.6)$$

Розглянемо поля, що залежать від часу за гармонійним законом (монохроматичні поля). При гармонійній залежності від часу функція *U(z,t)* якщо обмежитися розглядом тільки „прямої” хвилі, має вигляд

$$U(z,t)=U_m\cos\left[\omega(t-\frac{z}{V})+\varphi\right]=U_m\cos(\omega t-kz+\varphi)\,. \qquad (5.6)$$

Параметр $k=\omega/V$ називається хвильовим числом. На рис. 5.2 наведені два „миттєвих знімка” гармонійної хвилі (5.6).



При кожному фіксованому *t* функція *U(z,t)* описує косинусоїдальний просторовий розподіл. Через час τ косинусоїда як ціле зміщується уздовж осі *z* на відстань $\Delta z=V\tau$. Період розподілу в просторі (тобто відстань, на якому фаза змінюється на 2π) називається довжиною хвилі λ. Таким чином, $k\lambda=2\pi$ і для хвильового числа справедливі два вирази

$$k=\frac{\omega}{V}=\frac{2\pi}{\lambda}\,. \qquad (5.7)$$

6. МЕТОД КОМПЛЕКСНИХ АМПЛІТУД В ЕЛЕКТРОМАГНЕТИЗМІ

Усі реальні електромагнітні процеси можна представити у вигляді суперпозиції коливань, що змінюються в часі за гармонійним законом. Тому вивчення електромагнітних полів, що гармонічно змінюються в часі, має важливе практичне значення. Такі поля ще називають монохроматичними.

Аналіз гармонійних процесів істотно спрощується при використанні методу комплексних амплітуд. Відповідно до цього методу замість будь-якої скалярної функції *a(t)*, що змінюється в часі за гармонійним законом

$$a(t) = a_m \cos(\omega t + \lambda), \tag{6.1}$$

де a_m – амплітуда; ω – колова частота; φ – початкова фаза, вводиться в розгляд комплексна функція

$$\dot{a}(t) = a_m e^{j(\omega t + \varphi)} = \dot{a}_m e^{j\omega t}. \tag{6.2}$$

Величину $\dot{a}_m = a_m e^{j\varphi}$, що несе інформацію про амплітуду й початкову фазу, називають комплексною амплітудою функції *a(t)*.

Внаслідок відомої формули Ейлера фізична величина *a* є дійсна (Re) частина її комплексного подання:

$$a(t) = \mathrm{Re}\,\dot{a}(t). \tag{6.3}$$

Аналогічно для векторних величин замість вектора

$$\vec{a}(t) = \vec{x}_0 a_{x_m} \cos(\omega t + \varphi_1) + \vec{y}_0 a_{y_m} \cos(\omega t + \varphi_2) + \vec{z}_0 a_{z_m} \cos(\omega t + \varphi_3)$$

вводиться в розгляд комплексний вектор

$$\dot{\vec{a}}(t) = \vec{x}_0 a_{xm} e^{j(\omega t + \varphi_1)} + \vec{y}_0 a_{y_m} e^{j(\omega t + \varphi_2)} + \vec{z}_0 a_{zm} e^{j(\omega t + \varphi_3)}. \tag{6.4}$$

Вираз (6.4) можна записати у вигляді

$$\dot{\vec{a}}(t) = \dot{\vec{a}}_m e^{j\varpi t}, \tag{6.5}$$

де

$$\dot{\vec{a}}_m = \vec{x}_0 a_{xm} e^{j\varphi_1} + \vec{y}_0 a_{y_m} e^{j\varphi_2} + \vec{z}_0 a_{zm} e^{j\varphi_3} \tag{6.6}$$

– комплексна амплітуда вектора $\vec{a} = \mathrm{Re}\,\dot{\vec{a}}(t)$ (6.7).

Використання методу комплексних амплітуд в електродинаміці при вивченні монохроматичних полів значно спрощує техніку вирішення рівнянь Максвелла. Оскільки рівняння Максвелла лінійні, а диференціювання функції (6.5) за часом зводиться просто до множення її на $j\omega$, то всі члени рівнянь виявляються помноженими на $e^{j\omega t}$. Наприклад, перше рівняння Максвелла набуває вигляду

$$rot\dot{\vec{H}}_m e^{j\omega t} = \dot{\vec{j}}_m e^{j\omega t} + j\omega\dot{\vec{D}}_m e^{j\omega t}. \tag{6.8}$$

Скорочуючи множник $e^{j\omega t}$, отримуємо диференціальне рівняння щодо комплексних амплітуд, що не залежать від часу:

$$rot\dot{\vec{H}}_m = \dot{\vec{j}}_m + j\omega\dot{\vec{D}}_m. \tag{6.9}$$

Якщо в результаті розв’язання рівняння невідома комплексна амплітуда визначена, то для одержання шуканої фізичної величини треба лише помножити комплексну амплітуду на $e^{j\omega t}$ й відокремити потім дійсну частину.

При розгляді гармонійних полів практичний інтерес представляє знання не миттєвих величин, а середніх за період значень їхніх квадратів або добутків. Тому отримаємо трохи корисних для подальшого співвідношень:

$$\overline{a^2} = \frac{1}{T}\int_0^T a^2 dt = \frac{a_m^2}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t + \varphi)dt = \frac{1}{2}a_m^2 = \frac{1}{2}\dot{a}_m\dot{a}_m^*. \tag{6.10}$$

Таким чином, середнє за період значення квадрата гармонійно мінливої в часі величини виражається через її комплексну амплітуду.

Розглянемо тепер дві функції, що змінюються за гармонійними законами:

$$\begin{aligned} a(t) &= a_m \cos(\omega t + \varphi), \\ b(t) &= b_m \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned} \tag{6.11}$$

і знайдемо середнє від їхнього добутку

$$\overline{a \cdot b} = \frac{1}{T}\int_0^T a(t)b(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}(\dot{a} + \dot{a}^*)\frac{1}{2}(\dot{b} + \dot{b}^*)dt =$$

$$= \frac{1}{4T}\int_0^T (\dot{a}_m \dot{b}_m e^{jl\omega t} + \dot{a}_m^* \dot{b}_m^* e^{jl\omega t} + \dot{a}_m \dot{b}_m^* + \dot{a}_m^* \dot{b}_m)dt$$

Перші два члени дають при інтегруванні нуль. У результаті отримуємо

$$\overline{a \cdot b} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\dot{a}_m \dot{b}_m^*) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\dot{a}_m^* \dot{b}_m)\,. \tag{6.12}$$

Формули, аналогічні (6.10) і (6.12), можна записати й для векторних величин:

$$\overline{\vec{a}^{\,2}} = \frac{1}{2}(\dot{\vec{a}}_m \dot{\vec{a}}_m^*)\,; \tag{6.13}$$

$$\overline{(\vec{a}\vec{b})} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\dot{\vec{a}}_m \dot{\vec{b}}_m^*) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\dot{\vec{a}}_m^* \dot{\vec{b}}_m)\,; \tag{6.14}$$

$$\overline{[\vec{a} \times \vec{b}]} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\dot{\vec{a}}_m \times \dot{\vec{b}}_m^*] = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\dot{\vec{a}}_m^* \times \dot{\vec{b}}_m]\,. \tag{6.15}$$

Співвідношення (6.13) – (6.15) зручно використовувати при аналізі енергетичних співвідношень у монохроматичному, електромагнітному полі.

Навчальне видання

МАТЕМАТИЧНИЙ ВСТУП ДО КУРСУ ФІЗИКИ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до самостійної роботи студентів
з курсу
"Загальна фізика"

*(для студентів 1 курсу денної і заочної форм навчання
за напрямами підготовки бакалаврів
6.050701 «Електротехніка та електротехнології»,
6.050702 «Електромеханіка»)*

Укладач: **ОРЕЛ** Євгеній Станіславович

Відповідальний за випуск: к. ф. –м. н., доц. Є. І. Назаренко

За авторською редакцією

Комп'ютерне верстання *Є. С. Орел*

План 2013, поз. 196 М

Підп. до друку 05.06.2013 Формат 60х84/16
Друк на ризографі Ум. друк. арк. 2,3
Зам. № Тираж 50 пр.

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 4705 від 28. 03. 2014 р.